Raisonnement par récurrence:

1. «  est pair pour  »
2. «  »
3. «  »
4. «  »
5. «  »
6. Soit la suite définie par  et pour tout entier

,

Démontrer que la suite  est croissante.

1. Soit la suite  définie par  et pour tout entier naturel .  
   On considère la fonction  définie sur

 par .  
1) Étudier les variations de .  
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel ,

Regarder le corrigé après avoir terminé tous les exercices.

**!**

1. Soit la propriété : « est pair avec ». Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Tout d’abord, on démontre que cette propriété est valable pour

Pour  : pair

est alors vrai.

**Hérédité :**

Soit un entier naturel quelconque , tel que vraie, démontrons alors que est vraie, c’est-à-dire que est pair.

est pair car , et est également pair donc la somme est pair

La propriété est vraie, donc est pair.

La somme de 2 nombres pairs est paire.

est donc également vraie.

**Conclusion :**

La propriété est alors pour tout vraie.

1. Soit la propriété : «  ». Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Tout d’abord, on démontre que cette propriété est valable pour

Pour et

Pour et

est alors vrai.

**Hérédité :**

Soit un entier naturel supérieur ou égal à 4 quelconque , tel que vraie, démontrons alors que est vraie, c’est-à-dire que

.

On sait que :

Le sens reste pareil car on multiplie par 2

Si on démontre que est plus grand que on aura alors démontré que . On calcule la différence :

Trinôme du second degré avec

Il existe alors 2 solutions :

La racine est négative, elle nous intéresse pas

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Signe de la différence |  |

Pour , le trinôme est positif, donc . On a alors .

est donc également vraie.

**Conclusion :**

La propriété est alors pour tout vraie.

1. Soit la propriété : «  ». Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Tout d’abord, on démontre que cette propriété est valable pour

Pour  : et

est alors vrai.

**Hérédité :**

Soit un entier naturel quelconque , tel que vraie, démontrons alors que est vraie, c’est-à-dire que .

La propriété est vraie donc

est donc également vraie.

**Conclusion :**

La propriété est alors pour tout vraie.

1. Soit la propriété :

«  ». Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Tout d’abord, on démontre que cette propriété est valable pour

Pour  : et

est alors vrai.

**Hérédité :**

Soit un entier naturel quelconque , tel que vraie, démontrons alors que est vraie, c’est-à-dire que .

La propriété est vraie donc

Trinôme du second degré avec

On factorise le trinôme :

est donc également vraie.

**Conclusion :**

La propriété est alors pour tout vraie.

1. Soit la propriété : « et  » connue comme *l’inégalité de Bernoulli*. Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Tout d’abord, on démontre que cette propriété est valable pour

Pour  : et

est alors vrai.

**Hérédité :**

Soit un entier naturel quelconque , tel que vraie, démontrons alors que est vraie, c’est-à-dire que .

On sait que :

On ne change pas le signe de l’inégalité car

Or alors donc :

est donc également vraie.

**Conclusion :**

La propriété est alors pour tout vraie.

1. Soit la propriété : « la suite  est croissante ou

». Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Tout d’abord, on démontre que cette propriété est valable pour

Pour  : et

est alors vrai.

**Hérédité :**

Soit un entier naturel quelconque , tel que vraie, démontrons alors que est vraie, c’est-à-dire que .

On sait que :

On ne change pas le signe de l’inégalité car

On ne change pas le signe de l’inégalité (somme)

est donc également vraie.

**Conclusion :**

La propriété est alors pour tout vraie.

1. 1) La fonction est dérivable sur

Le dénominateur est toujours positif, cependant le numérateur est négatif, le signe de la dérivée est alors négatif et le sens de variation est décroissant sur

2) Soit la propriété : «  ». Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :**

Tout d’abord, on démontre que cette propriété est valable pour

Pour  :

est alors vrai.

**Hérédité :**

Soit un entier naturel quelconque , tel que vraie, démontrons alors que est vraie, c’est-à-dire que .

On sait que :

On change le signe de l’inégalité car est décroissante

est donc également vraie.

**Conclusion :**

La propriété est alors pour tout vraie.